

係数の大きい1次不定方程式の整数解（一般解）を求める方法について

例題

方程式 $48x + 539y = 77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ。

解法1：ユークリッドの互除法を用いる解法

解法の原理

$ax + by = m$ ……① において、

整数 a と整数 b ($a > b$) が互いに素ならば、その最大公約数は1だから、

ユークリッドの互除法を続けると、

$$a = bp_1 + r_1, \quad b = r_1p_2 + r_2, \quad r_1 = r_2p_3 + r_3, \quad \dots, \quad r_{n-2} = r_{n-1}p_n + r_n, \quad r_{n-1} = r_n p_{n+1} + 1$$

となる。

よって、これを逆にたどっていけば、以下の等式を満たすある整数 x_0, y_0 が得られる。

$$1 = r_{n-1} - r_n p_{n+1} = r_{n-1} - (r_{n-2} - r_{n-1} p_n) = \dots = ax_0 + by_0$$

$ax_0 + by_0 = 1$ の両辺を m 倍すると、

$$a(mx_0) + b(my_0) = m \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

① - ② より、

$$a(x - mx_0) + b(y - my_0) = 0$$

$$\therefore a(x - mx_0) = -b(y - my_0)$$

a と b は互いに素だから、整数 k を用いて、 $x - mx_0 = kb$ とすると、 $y - my_0 = -ka$

よって、 $ax + by = m$ の一般解は、 $(x, y) = (kb + mx_0, -ka + my_0)$

解

$$539 = 48 \cdot 11 + 11$$

$$48 = 11 \cdot 4 + 4$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$

より、

$$1 = 4 - 3 \cdot 1$$

$$= 4 - (11 - 4 \cdot 2) \cdot 1 = 4 \cdot 3 - 11$$

$$= (48 - 11 \cdot 4) \cdot 3 - 11 = 48 \cdot 3 - 11 \cdot 13$$

$$= 48 \cdot 3 - (539 - 48 \cdot 11) \cdot 13 = 48 \cdot 146 + 539 \cdot (-13)$$

よって、

$$48 \cdot 146 + 539 \cdot (-13) = 1$$

$$\therefore 48 \cdot 146 \cdot 77 + 539 \cdot (-13) \cdot 77 = 77$$

$$\therefore 48(x - 146 \cdot 77) + 539(y + 13 \cdot 77) = 0$$

48 と 539 は互いに素だから、

$$x - 146 \cdot 77 = 539k \quad (k \text{ は整数}) \text{ とおくと, } y + 13 \cdot 77 = -48k$$

$$\therefore x = 539k + 11242, \quad y = -48k - 1001 \quad \dots \dots \text{(答)}$$

補足

整数 a と整数 b ($a > b$) が 1 より大きい公約数をもつ場合

整数 a と整数 b の最大公約数を G とすると、

$$a = a'G, \quad b = b'G \quad (a' \text{ と } b' \text{ は互いに素}) \text{ より, } a'Gx + b'Gy = m \quad \therefore G(a'x + b'y) = m$$

よって、 m も G を約数にもつ。そこで、 $m = Gm'$ とすると、

$$G(a'x + b'y) = Gm' \text{ より, } a'x + b'y = m'$$

したがって、 $a'x + b'y = m'$ の一般解から解を求めればよい。

解法 2 : 係数下げ

ユークリッドの互除法を利用

$$48x + 539y = 77 \quad \therefore 48x + (48 \cdot 11 + 11)y = 77 \quad \therefore 48(x + 11y) + 11y = 77$$

$$x + 11y = s \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{とおくと,}$$

$$48s + 11y = 77 \quad \therefore (11 \cdot 4 + 4)s + 11y = 77 \quad \therefore 11(4s + y) + 4s = 77$$

$$4s + y = t \quad \dots \textcircled{2} \quad \text{とおくと,}$$

$$11t + 4s = 77 \quad \therefore (4 \cdot 3 - 1)t + 4s = 77 \quad \therefore 4(3t + s) - t = 77$$

$$3t + s = k \quad \dots \textcircled{3} \quad \text{とおくと,}$$

$$4k - t = 77 \quad \therefore t = 4k - 77 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入すると, } 3(4k - 77) + s = k \quad \therefore s = -11k + 231 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{これを } \textcircled{4} \text{ と } \textcircled{5} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると, } 4(-11k + 231) + y = 4k - 77$$

$$\therefore y = 48k - 1001 \quad \dots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}$ と $\textcircled{6}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$x + 11(48k - 1001) = -11k + 231 \quad \therefore x = -539k + 11242$$

$$\text{よって, } x = -539k + 11242, \quad y = 48k - 1001 \quad \dots \text{(答)}$$

別解 : 途中でやめて特殊解を求めてしまう。

$$48x + 539y = 77 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{より, } 48x + (48 \cdot 11 + 11)y = 77 \quad \therefore 48(x + 11y) + 11y = 77$$

$$x + 11y = 0, \quad y = 7 \text{ のとき, } 48(x + 11y) + 11y = 77 \text{ が成り立つから,}$$

$$48(x + 11y) + 11y = 77, \quad \text{すなわち } 48x + 539y = 77 \text{ の特殊解は,}$$

$$\text{連立方程式 } \begin{cases} x + 11y = 0 \\ y = 7 \end{cases} \text{ を解くことにより, } x = -77, \quad y = 7 \text{ となる。}$$

$$\text{よって, } 48 \cdot (-77) + 539 \cdot 7 = 77 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、

$$48(x + 77) + 539(y - 7) = 0$$

$$48 \text{ と } 539 \text{ は互いに素だから, } x + 77 = 539k \quad (k \text{ は整数}) \text{ とおくと, } y - 7 = -48k$$

$$\text{よって, } x = 539k - 77, \quad y = -48k + 7 \quad \dots \text{(答)}$$

解法3：解が整数であることを利用（新課程の「合同式を利用した解法」と同じ原理）

$$48x + 539y = 77 \quad \dots \textcircled{1}$$

より,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-539y + 77}{48} \\ &= \frac{-(48 \cdot 11 + 11)y + 77}{48} \\ &= -11y + \frac{-11y + 77}{48} \\ &= -11y + \frac{-11(y - 7)}{48} \end{aligned}$$

ここで、48 と 11 は互いに素だから、

x が整数であるためには、 $y - 7$ は 48 の倍数でなければならない、

$y = 7$ はこれを満たす。また、このとき $x = -77$

よって、

$$48 \cdot (-77) + 539 \cdot 7 = 77 \quad \dots \textcircled{2}$$

①-②より、

$$48(x + 77) + 539(y - 7) = 0$$

48 と 539 は互いに素だから、 $x + 77 = 539k$ (k は整数) とおくと、 $y - 7 = -48k$

よって、 $x = 539k - 77$, $y = -48k + 7$ \dots (答)

感想

解法3 が一番楽なような気がします。